Ainsi $F(x) = \int_0^{e^x} f(t)dt = \int_0^{u(x)} f(t)dt = \Phi[u(x)] = \Phi \circ u(x)$

$\left.\begin{array}{l}\Phi \text{ est dérivable sur } IR^+\\ u \text{ est dérivable sur } IR\\ \forall x \in IR; u(x)=e^x \in IR^+\end{array}\right\} \Rightarrow F=\Phi \circ u \text{ est dérivable sur IR}$

$\bullet \forall x \in IR; F'(x) = [\Phi \circ u(x)]' = u'(x) \times \Phi'[u(x)]$

$= e^x f(u(x)) = e^x \dfrac{e^{e^x}-1}{e^x} = e^{e^x} - 1.$

$\bullet \forall x \in IR; e^x > 0$ donc $\forall x \in IR; e^{e^x} > e^0 = 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in IR; F'(x) = e^{e^x} - 1 > 0.$

D'où F est strictement croissante sur IR.

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [\Phi[u(x)]] = 0$

Car $x \to -\infty; u(x) = e^x \longrightarrow 0^+$ et puisque Φ est la primitive de f sur IR^+ donc Φ est continue sur IR^+

alors $\Phi[u(x)] \to \Phi(0)=0$

3/a- $\forall x > 0$ on a $e^x > 1$.

$\forall t \in [1, e^x]; f(t) - \dfrac{t-1}{t} = \dfrac{e^t-1}{t} - \dfrac{t-1}{t} = \dfrac{e^t-t}{t}.$

Soit la fonction $v:[1;+\infty[\longrightarrow IR; t \mapsto e^t - t$

v est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $v'(t) = e^t - 1 > 0$

$\Rightarrow$ v est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Par suite $\forall t \in [1, e^x]$ on a $v(t) \geq v(1) = e - 1 > 0$

D'où $\forall t \in [1, e^x]$ on a $e^t - t > 0$

Ce qui donne $\forall t \in [1, e^x]$ on a $f(t) - \dfrac{t-1}{t} = \dfrac{e^t-t}{t} > 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in [1, e^x]$ on a $f(t) > \dfrac{t-1}{t}$

D'où $F(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt > \int_1^{e^x} \dfrac{t-1}{t}dt.$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = ?$

$\bullet \int_1^{e^x} \dfrac{t-1}{t}dt = \int_1^{e^x} \left[1 - \dfrac{1}{t}\right]dt = [t - Logt]_1^{e^x} = e^x - x - 1.$

Donc $\forall x > 0; F(x) > e^x - x - 1.$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} [e^x - x - 1] = \lim\limits_{x\to+\infty} [x(e^x - 1) - 1] = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$

$\bullet \forall x > 0; F(x) > e^x - x - 1 \Leftrightarrow \forall x > 0; \dfrac{F(x)}{x} > \dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}$

Ajoutant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right] = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty.$